Tema 3: Funciones lineales

Introducción

En este tema vamos a tratar problemas lineales. Estos problemas son aquellos que cumplen dos propiedades: la aditividad y la proporcionalidad. La primera de ellas consiste en que si dos vectores u y v son soluciones, entonces $u + v$ también lo es. La segunda es que si u es solución y k un escalar, entonces ku es solución.

Obviamente los problemas lineales son más sencillos de resolver que los no lineales y la resolución de estos consiste en general en buscar una aproximación a través de un problema lineal. Las funciones lineales respetan la estructura de espacio vectorial.

Funciones lineales

Si tenemos dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo, es natural preguntarse si existen funciones entre estos dos espacios tales que relaciones entre vectores en el primero (el dominio de la función) se puedan comparar y transformar en relaciones entre vectores del segundo (el codominio de la función).

Definición: Sean $(E, +, \cdot)$ y $(E', \oplus, *)$ dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Diremos que la función $f : E \to E'$ es lineal (o también, que es un homomorfismo de $\mathbb{K}-$ e. v.), si f satisface las siguientes propiedades:

1. $\forall\ u, v \in E, f(u + v) = f(u) \oplus f(v)$
2. $\forall\ u \in E, \forall\ \alpha\ \mathbb{K}, f(\alpha \cdot u) = \alpha * f(u)$

Observación: Por facilidad de notación, usaremos el mismo símbolo + para denotar ambas operaciones en ambos espacios, aunque estas puedan no ser la misma. Lo mismo ocurre con $\cdot$.//

Proposición: Siendo E y E' $\mathbb{K}-$ e.v., se verifica que la función $f : E \to E'$ es lineal si y sólo si $\forall u, v \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, se verifica que

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$$

Es obvio que esto se puede generalizar a una cantidad n de vectores, siendo cierto que

$$f(\sum_{i=i}^{n} \alpha_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(u_i)$$

Ejemplos:

- La función identidad $f : E \to E$ determinada por $f(u) = u$.
- La función cero $f : E \to E'$ determinada por $f(u) = 0$.
- La función proyección i-ésima $f_i : E_1 \times E_2 \times .... \times E_n \to E_i$ determinada por $f_i((u_1, u_2, ..., u_n)) = u_i$.
- La función multiplicación por A $f_A : M_{nx1} \to M_{mx1}$ determinada por $f(X) = AX$.
- La función que asigna a cada vector sus coordenadas en base B $f_B : E \to \mathbb{K}^n$ determinada por $f(u) = (k_1, k_2, ..., k_n)$.
- La función determinante $f : M_n \to \mathbb{K}$ determinada por $f(X) = det(X)$ NO es lineal.

Propiedades de funciones lineales

Proposición: Si E y E' son $\mathbb{K}-$ e.v. y $f : E \to E'$ es lineal, entonces se verifica que:

1. $f(0) = 0$
2. $\forall u \in E, f(-u) = -f(u)$

Demostración:

1. $\forall u \in E,\ f(0) = f(0 \cdot u) = 0 \cdot f(u) = 0$
2. Dado $u \in E$, se tiene que

$$f(u) + f(-u) = f(u + (-u)) = f(0) = 0$$

por lo que podemos concluir que $f(-u)$ es el opuesto de $f(u)$ o, lo que es lo mismo, que $f(-u) = -f(u)$, puesto que $(E', +)$ es un grupo.

Ejemplo:

- Si tomamos $v_0 \neq 0$ un vector fijo de un espacio vectorial E, y tomamos la transformación $f(u) = u + v_0$ (es decir la traslación del vector), no sería lineal porque $f(0) = 0 + v_0 = v_0 \neq 0$.

Proposición: Sean E y E' dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo y consideremos el conjunto de todas las funciones lineales que van de E a E'. A este conjunto le vamos a llamar $L(E, E')$. Este espacio tiene estructura de espacio vectorial, es decir, que la suma de funciones lineales es una función lineal y la multiplicación de un escalar por una función lineal es lineal.

Ejemplos:

- Con estas condiciones, y sabiendo que la función identidad siempre pertenece a este espacio, tenemos también que $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, la función αId es función lineal. Es decir, aquella que es $f : E \to E$ definida por $f(u) = \alpha u$.
- Como la función proyección i-ésima es lineal, tenemos que la suma y multiplicación por escalares de este tipo de funciones lo es también $(\alpha_1 p_1 + ... + \alpha_n p_n)$.

Proposición: Si E, E' y E'' son $\mathbb{K}-$ e. v. y $f : E \to E'$ y $g : E' \to E''$ son funciones lineales, entonces la función composición de g con f, $g \circ f : E \to E''$, también es una función lineal.

Núcleo e imagen

Proposición: Si E, E' y E'' son $\mathbb{K}-$ e. v. y $f : E \to E'$ es lineal se verifica que:

1. $\forall H \subset E, (H \prec E \Rightarrow f(H) \prec E')$
2. $\forall H' \subset E', (H' \prec E' \Rightarrow f^{-1}(H') \prec E)$

en otras palabras: la imagen directa y recíproca de un subespacio vectorial por una función lineal es un subesapcio vectorial.

Definición: Sean E y E' $\mathbb{K}-$ e.v. y $f : E \to E'$ una función lineal.

- Llamamos núcleo de f al conjunto $Ker(f) = f^{-1}(0) = \{u \in E | f(u) = 0\}$
- Llamamos imagen de f al conjunto $Im(f) = \{v \in E' | \exists u \in E \text{ tal que } f(u) = v\} = f(E)$

Se verifica además que $Ker(f) \prec E$ y $Im(f) \prec E'$.

Ejemplo:

- Sea la función identidad $f : E \to E$. El núcleo es el subespacio $\{0\}$ y la imagen es el espacio E.
- Sea la función cero $f : E \to E'$. El núcleo es el subespacio E y la imagen es el espacio $\{0\}$.
- Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (x + y, x - 2y)$.
- Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (x + y, 2x + 2y)$.

Definición:

- Una función f entre dos conjuntos A y B es inyectiva si $\forall a_1, a_2 \in A, f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$
- Una función f entre dos conjuntos A y B es sobreyectiva si $\forall b \in B$ existe $a \in A$ tal que $b = f(a)$
- Una función f entre dos conjuntos A y B es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.

Teorema: Sean E y E' $\mathbb{K}-$ e. v. y $f : E \to E'$ una función lineal. Se verifica que

1. f es inyectiva $\Leftrightarrow Ker(f) = \{0\}$
2. f es sobreyectiva $\Leftrightarrow Im(f) = E'$

Espacios vectoriales isomorfos

Definición: Siendo E y E' dos $\mathbb{K}-$ e.v., se dice que E y E' son isomorfos si existe una función $f : E \to E'$ tal que f es lineal y biyectiva. Si $f : E \to E'$ es lineal y biyectiva, se dice que f es un isomorfismo.

Si dos $\mathbb{K}-$ e.v. E y E' son isomorfos, desde un punto de vista algebraico son iguales o indistinguibles, en el sentido de que toda propiedad relacionada con la estructura de espacio vectorial que posea E se transfiere automáticamente al espacio E' a través del isomorfismo y recíprocamente.

Funciones lineales en espacios vectoriales de dimensión finita

Teorema: Sean E y E' dos $\mathbb{K}-$ e.v., $\{u_1, ..., u_n\}$ una base de E y $\{v_1, ..., v_n\}$ un sistema cualquiera de n vectores de E'. En estas condiciones existe una única función lineal $f : E \to E'$ tal que $\forall i \in \{1, ..., n\}$ se tiene que $f(u_i) = v_i$.
Además se verifica que

1. f es inyectiva $\Leftrightarrow \{v_1, ..., v_n\}$ es libre
2. f es sobreyectiva $\Leftrightarrow L[\{v_1, ..., v_n\}] = E'$
3. f es un isomorfismo $\Leftrightarrow \{v_1, ..., v_n\}$ es una base de E'.

Por tanto, a vista de este teorema, tenemos que si E y E' son $\mathbb{K}-$ e.v. y $\{u_1, ..., u_n\} \in E$ es una base de E, cualquier función lineal $f : E \to E'$ queda completamente determinada por el sistema $\{f(u_1), ..., f(u_n)\}$.

Ejemplos: Dada la función lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ determinada por las condiciones $f(1, 0) = (3, 4, 1)$ y $f(0, 1) = (-1, 0, 1)$. Determinar $f(3, 1)$ y $f(2, -1)$.

Corolario: Si E y E' son dos $\mathbb{K} - e.v.$ finitamente generados (de dimensión finita), entonces E y E' son isomorfos $\Leftrightarrow dim(E) = dim(E')$.

Corolario: Si E es un $\mathbb{K}-$ e.v. y $B = \{u_1, ..., u_n\}$ es una base ordenada de E, la función que asocia a todo vector la matriz de sus coordenadas respecto de la base B, $((\cdot)_B : E \to M_{nx1}(\mathbb{K})$ tal que a cada vector $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ le asocia sus coordenadas en base B, $(v)_B = (\alpha_1, ..., \alpha_n))$ es un isomorfismo.

Observación: Sabiendo esto, es claro que estudiar los vectores es equivalente a estudiar sus coordenadas. Por tanto un sistema de vectores será ligado, libre o base si sus coordenadas lo son. Obviamente, es mucho mejor estudiar las coordenadas que el propio sistema porque están en $\mathbb{K}^n$.

Ejemplos:

1. En $\mathbb{R}^3$ con su estructura de espacio vectorial habitual, el sistema $\{(-1, 1, 1), (1, 1, 1), (1, -1, 0)\}$ es libre (o ligado) si y sólo si sus coordenadas respecto de la base canónica B_c lo son (que en este caso son iguales).

2. En el espacio vectorial $P_4(\mathbb{C})$ el sistema

$$\{x+3x^2, 2+x, -3+x^3, 1+x^4\}$$

es libre (o ligado) si sus vectores de coordenadas respecto a la base usual $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ lo son (en este caso serían $\{(0,1,3,0,0), (2,1,0,0,0), (-3,0,0,1,0), (1,0,0,0,1)\}$).

Dimensiones del núcleo y de la imagen

Teorema: Si $f: E \to E'$ es una función lineal tal que los subespacios $Ker(f)$ y $Im(f)$ son de dimensión finita, entonces E es también de dimensión finita y

$$dim(E) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f))$$

Matriz asociada a una función lineal

Sean E, E' $\mathbb{K}-$ e.v., $f: E \to E'$ y sea $B = \{u_1, ..., u_n\}$ base de E y $B' = \{v_1, ..., v_m\}$ base de E'. Recordemos que la función f viene totalmente determinada por el sistema $\{f(u_1), ..., f(u_n)\}$. Queremos obtener una expresión que nos permita calcular, para todo vector $w \in E$, las coordenadas de $f(w)$ respecto de B' sin más que conocer las coordenadas de w respecto de B. Así pues, supongamos que:

$$\forall j \in \{1, ..., n\} \qquad (f(u_j)_{B'}) = (\alpha_{1j}, ..., \alpha_{mj})$$

Si tomamos un $w \in E$, tenemos que

$$(w)_B = (x_1, ..., x_n)$$

En ese caso $f(w) = f(\sum_{j=1}^n x_j u_j) = \sum_{j=1}^n x_j f(u_j)$ y por tanto

$$(f(w))_{B'} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2n} \\ ... & & & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & ... & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

En definitiva si $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2n} \\ ... & & & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & ... & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$, tendremos que

$$(f(w))_{B'} = A \cdot (w)_B$$

A la matriz A la denominaremos **matriz asociada a la función lineal f respecto de las bases B y B'** y la denotaremos por $Mf_{B \to B'}$. Nótese la disposición natural de las bases en la notación de la matriz. Por tanto, tenemos que las columnas de la matriz son un sistema generador de la imagen de f, ya que las columnas son el sistema $\{f(u_1)_{B'}, ..., f(u_n)_{B'}\}$ que determina a la función f.

Ejemplos:

1. Si consideramos en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ sus estructuras habituales de $\mathbb{R}-$ e.v. y la función lineal $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ determinada por

$$f(1,0,0) = (1,2), f(0,1,0) = (0,1), f(0,0,1) = (3,\ sqrt2)$$

Calcular la matriz de f. Hacer lo mismo si la base de $\mathbb{R}^3$ es $B = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$

2. Si consideramos el espacio vectorial $P_3(\mathbb{C})$ cuya base es $\{1, x, x^2, x^3\}$ y la función lineal $f: P_3(\mathbb{C}) \to P_3(\mathbb{C})$ determinada por

$$f(1) = x+3x^2, f(x) = 2+x, f(x^2) = -3+x^3, f(x^3) = 1+x^3$$

Calcular la matriz de f.

Algoritmo para hallar una base del núcleo y de la imagen

Dada una función lineal $f : E \to E'$ entre dos $\mathbb{K}-$ e.v. de dimensiones finitas n y m, queremos hallar una base del núcleo y una base de la imagen de f.

Fijadas dos bases B y B' de E y E', respectivamente, sea $M_f B \to B'$ la matriz de f. Construimos la matriz $(\frac{Mf_{B\to B'}}{I_n})$ y aplicamos a esta matriz el método de Gauss hasta obtener una matriz de la forma $(\frac{A}{P})$, donde A es la forma gaussiana de la matriz $Mf_{B\to B'}$. Así que las columnas de P que aparezcan bajo las columnas nulas de A constituyen una base del núcleo de f y las columnas no nulas de A constituyen una base de la imagen de f.

Ejemplo: Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (x + 2y - 3z, x - 2y + z)$. Sean B y B' las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$. Calcular una base de la imagen y del núcleo.

Matriz asociada a la composición de funciones lineales

Lema: Sean $A, B \in M_{mxn}(\mathbb{K})$. En estas condiciones:

1. $(A = (0) \in M_{mxn}(\mathbb{K})) \Leftrightarrow (\forall X \in M_{nx1}(\mathbb{K}), A \cdot X = (0) \in M_{mx1}(\mathbb{K}))$
2. $A = B \Leftrightarrow (\forall X \in M_{nx1}(\mathbb{K}), A \cdot X = B \cdot X)$

Proposición: Si E, E', y E'' son $\mathbb{K}-$ e.v. de dimensión finita. B, B' y B'' son bases de E, E' y E'' respectivamente, y $f : E \to E'$ y $g : E' \to E''$ son funciones lineales, entonces se verifica que

$$M(g \circ f)_{B\to B''} = Mg_{B'\to B''} \cdot Mf_{B\to B'})$$

Ejemplo: Si consideramos en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ sus estructuras habituales de $\mathbb{R}-$ e.v. y las funciones lineales $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tales que

$$Mf_{B_3\to B_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, Mg_{B_2\to B_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz de la función composición.

Observación: Es importante observar que la multiplicación de matrices está hecha en orden de la composición y que las bases tienen el orden para salir de la primera y llegar a la última, siempre empalmando la que se llega con la que sale.

Matrices semejantes y cambios de base

Recordemos que la matriz de cambio de base es la matriz de la aplicación identidad entre las dos bases que se quieren cambiar. Es decir, $M_{B\to B'} = M(Id_E)_{B\to B'}$. Recordemos también que $M^{-1}_{B\to B'} = M_{B'\to B}$.

Si tenemos una matriz de una aplicación f definida entre las bases B y $B'(Mf_{B\to B'})$ y queremos cambiar esas bases y obtener la matriz de f entre las bases B_1 y B_2 entonces tendremos que hacer lo siguiente:

$$Mf_{B_1\to B_2} = M_{B'\to B_2} Mf_{B\to B'} M_{B_1\to B}$$

Esto se ve de manera más claro si tomamos un vector y vamos viendo que pasa con cada matriz que multiplicamos teniendo siempre en mente que es lo que buscamos.

Ejemplo: Si consideramos en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ sus estructuras habituales de $\mathbb{R} - e.v.$ y la función lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$M_{B_3\to B_2}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

siendo

$$B = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}, B' = \{(1, 1), (0, 1)\}$$

Obtener las matrices de cambio.